Mathématiques : analyse

Séance 2 : Notions de base, preuves et topologie

MATH-S-1011 et MATH-S-1021 — Université libre de Bruxelles
Solvay Brussels School of Economics and Management
Auteurs : Germain Van Bever et Davy Paindaveine

Contenu de la séance

Maximum, minimum, supremum, infimum

La notion de preuve

Topologie dans $\mathbb{R}$

Contenu de la séance

Maximum, minimum, supremum, infimum

La notion de preuve

Topologie dans $\mathbb{R}$

Majorant

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1

$a\ (\in \mathbb{R})$ *est un majorant de* $A\ (\subset \mathbb{R}) \iff a \geq x$ *pour tout* $x \in A$.

Exemples :

- 1 est un majorant de $[0, 1]$ et de $[0, 1[$,
- 200 est un majorant de $[0, 1]$ et de $[0, 1[$, et
- 200 n'est pas un majorant de $[3, +\infty[$.

Maximum

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.2

a $(\in \mathbb{R})$ est le maximum de A $(\subset \mathbb{R})$ (notation : $a = \max A$) $\Longleftrightarrow$ a est un majorant de A et $a \in A$.

Exemples :

- $\max [0, 1] = 1$,
- $\max [0, 1[$ n'existe pas, et
- $\max [3, +\infty[$ n'existe pas.

→ 1 est un majorant mais pas un maximum. On sent bien qu'il joue un rôle particulier.

Unicité du maximum

S'il existe, le maximum est unique ! Ceci justifie, en particulier, qu'on a écrit "le maximum de A" ci-dessus.

Théorème 2.3

Tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ a 0 ou 1 maximum.

VOCABULAIRE :

un maximum
des maxima

idem pr minimum
et extremum.

Démonstration :

Supposons qu'il existe 2 maxima de A, on les note m_1 et m_2 tel que $m_1 \neq m_2$. On prend $m_1 < m_2$.

On a $m_1 = \max(A) \Leftrightarrow \forall a \in A,\ a \leq m_1$.

Or, $m_2 = \max(A)$, donc $m_2 \in A$.

Donc $m_2 \leq m_1$.

$\Rightarrow m_2 = m_1$. CONTRADICTION.

Minorant et minimum

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.4

$a \ (\in \mathbb{R})$ *est un minorant de* $A \ (\subset \mathbb{R}) \iff a \leq x$ *pour tout* $x \in A$.

Définition 2.5

$a \ (\in \mathbb{R})$ *est le minimum de* $A \ (\subset \mathbb{R})$ *(notation :* $a = \min A$*)* $\iff a$ *est un minorant de* A *et* $a \in A$.

Remarque : comme pour le maximum, le minimum est unique s'il existe (exercice).

Ensembles bornés

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.6

$A\ (\subset \mathbb{R})$ *est minoré* $\iff$ *A a (au moins) un minorant.*
$A\ (\subset \mathbb{R})$ *est majoré* $\iff$ *A a (au moins) un majorant.*
$A\ (\subset \mathbb{R})$ *est borné* $\iff$ *A est minoré et majoré.*

Exemples :

- $]-3,2[\ \cup\ [3,+\infty[$ est minoré mais non majoré,
- $]0,10[$ est borné ($\rightsquigarrow$ *"A borné"* ne signifie pas *"A contient ses bornes"* !), et
- $]-3,2[\ \cup\ [3,5]$ est borné.

→ ex : -10 est un minorant.

Négation de proposition

- Attention à la négation du "et" !
- A est borné s'il est minoré et majoré.
- Ainsi, A est non borné dès qu'il est non minoré ou non majoré.

Exemples :

- $]-3,2[\cup [3,+\infty[$ est non borné car il n'existe de majorant mais cet ensemble est minoré.
- $\mathbb{R}$ est non borné car

$\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

Supremum

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.7

a $(\in \mathbb{R})$ est le supremum de A $(\subset \mathbb{R})$ (notation : $a = \sup A$) $\Longleftrightarrow$ a est le minimum de l'ensemble des majorants de A.

Exemples :

ici, $\sup(A) \in A$ = $\max(A)$.

- $A = [0, 1] \Rightarrow$ l'ensemble des majorants de A est $[1, +\infty[\Rightarrow \sup A = 1$,
- $A = [0, 1[\Rightarrow$ l'ensemble des majorants de A est $[1, +\infty[\Rightarrow \sup A = 1$, et
- $A = [0, +\infty[= \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ l'ensemble des majorants de A est $\varnothing \Rightarrow \sup A$ n'existe pas.

Remarques :

- $\sup A$ existe $\Leftrightarrow$ A est majoré (et non vide);
- s'il existe, $\sup A$ est unique (pourquoi ?).

Infimum

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.8

a $(\in \mathbb{R})$ est l'infimum de A $(\subset \mathbb{R})$ (notation : $a = \inf A$) $\Longleftrightarrow$ a est le maximum de l'ensemble des minorants de A.

Exemples :

- $\inf\,[0,1] = \inf\,]0,1] = 0$,
- $\inf\,]-5,1] \cup [2,3[= -5$, et
- $\inf \mathbb{R}^-$ n'existe pas.

$\mathbb{R}^- =]-\infty ; 0]$.

Remarques :

- $\inf A$ existe $\Leftrightarrow$ A est minoré (et non vide);
- s'il existe, $\inf A$ est unique.

Interlude

A vous : soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Prouvez que $\inf A \leq \sup A$ (pour tout A tel que $\inf A$ et $\sup A$ existent) ! Discutez avec vos voisin.e.s.

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Pour tout $a \in A$, on a (par définition de l'inf(A))

$\inf(A) \leq a$.

De même, pour tout $a \in A$, on a :

$a \leq \sup(A)$.

Par transitivité de la relation d'ordre.

$\forall a \in A$, $\inf(A) \leq a \leq \sup(A) \Rightarrow \inf(A) \leq \sup(A)$.

Contenu de la séance

Maximum, minimum, supremum, infimum

La notion de preuve

Topologie dans $\mathbb{R}$

Propositions logiques

Une proposition logique (P) est une affirmation qui est soit vraie soit fausse. Quelques exemples :

- P_1 : "3 est impair" (vraie)
- P_2 : "3 est pair" (fausse)
- P_3 : "$3 \leq 10$" (vraie)
- P_4 : "la Belgique méritait de gagner le mondial 2018" (?)
- P_5 : "l'un des acteurs de *Demain nous appartient* joue bien la comédie" (?)

Une proposition logique peut contenir un ou plusieurs quantificateurs

- $\forall$: pour tout
- $\exists$: il existe

Remarque : Tacitement, P_5 fait intervenir "$\exists$".

Opérateurs logiques

Des opérateurs logiques permettent d'engendrer de nouvelles propositions.

- La négation de P (notation : $\sim P$, lue "*non* P") est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse.
  $\rightsquigarrow$ Exemple : $\sim$"3 est impair" = "3 est pair"
  $\rightsquigarrow$ Attention : on utilisera notamment $\sim \exists = \forall$ et $\sim \forall = \exists$. Par exemple, la négation de P_5 est

- La coordination de P et Q (notation : $P \wedge Q$, lue "P *et* Q") est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.
  $\rightsquigarrow$ Exemple : La proposition "3 est pair"$\wedge$"$3 \leq 10$" est fausse.

- La disjonction de P et Q (notation : $P \vee Q$, lue "P *ou* Q") est vraie si et seulement si au moins une des propositions P, Q est vraie.
  $\rightsquigarrow$ Exemple : La proposition "3 est pair"$\vee$"$3 \leq 10$" est vraie.

Opérateurs logiques (suite)

L'implication $P \Rightarrow Q$ (lue "P *implique* Q") est la proposition qui est fausse si et seulement si $P \wedge (\sim Q)$ est vraie.

$\rightsquigarrow$ Exemple : "$x \leq 10$" $\Rightarrow$ "$x \leq 4$" est fausse.

$\rightsquigarrow$ Exemple : "$x \leq 4$" $\Rightarrow$ "$x \leq 10$" est vraie.

Une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie !

Définition 2.9

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ *est* $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$.

Exemple : la contraposée de "$x \leq 4$" $\Rightarrow$ "$x \leq 10$" est "$x > 10$" $\Rightarrow$ "$x > 4$".

Conjecture

Une conjecture est une implication

$$P \Rightarrow Q$$

qu'on soupçonne être vraie (P est l'hypothèse et Q est la thèse).

- Pour prouver qu'une conjecture est fausse, on montre que $P \wedge (\sim Q)$ est vraie.

  Exemple : on montre que "$x \leq 10$" $(P) \Rightarrow$ "$x \leq 4$" (Q) est fausse en exhibant $x = 9$, qui correspond à $P \wedge (\sim Q)$.
- Pour prouver qu'une conjecture est vraie, on doit avoir recours à une preuve. Nous considérerons trois types de preuve dans ce cours.

$P =$ " $x \leq 10$ "
$Q =$ " $x \leq 4$ "
$P \wedge (\sim Q) =$ " $4 < x \leq 10$ "
$\sim Q =$ " $x > 4$ "

Preuve directe

Une preuve directe ne repose sur aucune technique particulière.

Théorème 2.10

Soit n un entier impair. Alors n^2 est un entier impair.

Démonstration (directe) :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que n est impaire. Puisque n est impaire :

$$\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1.$$

Rp : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

On a :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2\times 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{= k \in \mathbb{N}}) + 1 = 2k+1 \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}.$$

Donc n^2 est impaire.

Preuve par l'absurde

Une preuve par l'absurde de $P \Rightarrow Q$ consiste à supposer que $P \Rightarrow Q$ est fausse (c'est-à-dire, à supposer que $P \wedge (\sim Q)$ est vraie) et à montrer que ceci mène à une contradiction.

La contradiction indique donc qu'on a eu tort de supposer que $P \Rightarrow Q$ est fausse. L'implication est donc vraie.

Une preuve par l'absurde demande donc d'énoncer $\sim Q$ correctement.

Pour ce faire, on sera attentif

- à la négation des quantificateurs: $\sim \exists = \forall$ et $\sim \forall = \exists$,
- à la négation des implications: $\sim (P \Rightarrow Q) \equiv (P \wedge (\sim Q))$,
- à la négation des opérateurs "et" et "ou" :

Autres techniques de preuve

- La troisième méthode (preuve par induction) sera introduite plus tard (séance 4).
- Il existe d'autres méthodes de preuve (par contraposition, par cas, etc.).
- Elles ne seront pas abordées dans ce cours.
- Attention, de manière générale, il ne suffit pas d'exhiber un exemple pour prouver une proposition !

Interlude : Wooclap

Contenu de la séance

Maximum, minimum, supremum, infimum

La notion de preuve

Topologie dans $\mathbb{R}$

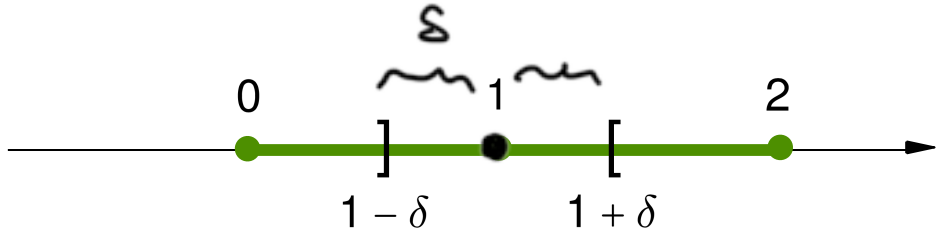
Point intérieur

Définition 2.11

a $(\in \mathbb{R})$ est intérieur à A $(\subset \mathbb{R})$ $\Longleftrightarrow$ Il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset A$.

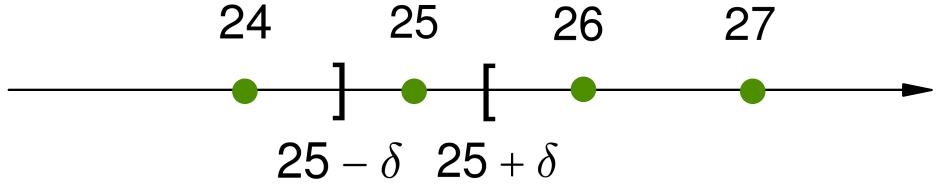
Exemples :

- 1 est intérieur à $[0, 2]$



- 2 n'est pas intérieur à $[0, 2]$

- 25 n'est pas intérieur à $\mathbb{N}$



Remarque : si a est intérieur à A, on dit parfois que *A est un voisinage de a*.

Intérieur

Définition 2.12

L'intérieur $\mathrm{int}(A)$ *de* A *est l'ensemble des réels intérieurs à* A.

$$\mathrm{int}(A) = \{a \in A : \exists \delta > 0 \,,\,]a-\delta ; a+\delta[\in A\}$$

Exemples :

- $\mathrm{int}([0,2]) = \mathrm{int}(]0,2]) = \mathrm{int}([0,2[) =]0,2[$,
- $\mathrm{int}([1,+\infty[) = \mathrm{int}(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$,
- $\mathrm{int}(\mathbb{N}) = \mathrm{int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$,
- $\mathrm{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Remarques :

- $\mathrm{int}(A) \subset A$ (pourquoi ?). car $\mathrm{int}(A) = \{a \in A ; \dots\}$
- Rappelons que $A \subset B$ signifie que A est un sous-ensemble de B, ce qui laisse la possibilité que $A = B$.

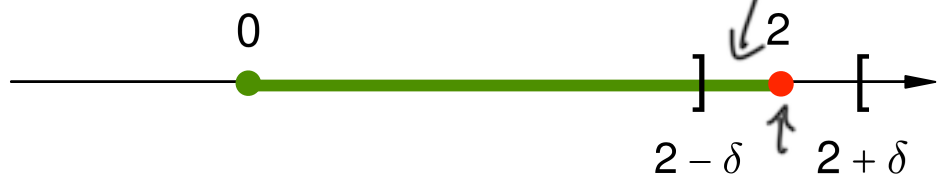
Point adhérent

Définition 2.13

a $(\in \mathbb{R})$ est adhérent à A $(\subset \mathbb{R})$ $\iff$ *Pour tout $\delta > 0$, $]a-\delta, a+\delta[\cap A$ est non vide.*

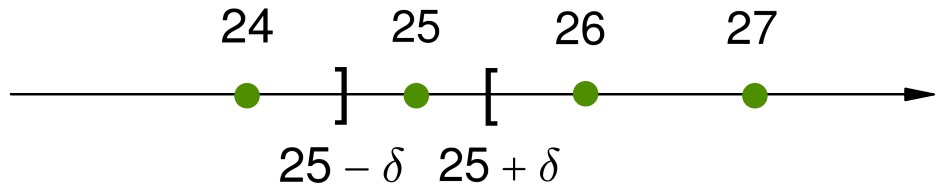
Exemples :

- 2 est adhérent à $[0, 2[$



- $-\frac{1}{5}$ n'est pas adhérent à $[0, 2[$

- 25 est adhérent à $\mathbb{N}$



Adhérence

Définition 2.14

L'adhérence (ou la fermeture) $\mathrm{adh}(A)$ *de* A *est l'ensemble des réels adhérents à* A.

Exemples :

- $\mathrm{adh}([0,2]) = \mathrm{adh}(]0,2]) = \mathrm{adh}([0,2[) = \mathrm{adh}(]0,2[) = [0,2]$,
- $\mathrm{adh}([1,+\infty[) = \mathrm{adh}(]1,+\infty[) = [1,+\infty[$,
- $\mathrm{adh}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$,
- $\mathrm{adh}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$,
- $\mathrm{adh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Remarque :

- $A \subset \mathrm{adh}(A)$ (pourquoi ?).

Bord

On a donc toujours $\mathrm{int}(A) \subset A \subset \mathrm{adh}(A)$.

Définition 2.15

Le bord (ou la frontière) de A est $\mathrm{bord}(A) = \mathrm{adh}(A) \setminus \mathrm{int}(A)$.

Exemples :

- $\mathrm{bord}(]a,b[) = \mathrm{bord}(]a,b]) = \mathrm{bord}([a,b[) = \mathrm{bord}([a,b]) = [a,b] \setminus]a,b[= \{a,b\}$,
- $\mathrm{bord}(]a,+\infty[) = \mathrm{bord}([a,+\infty[) = [a,+\infty[\setminus]a,+\infty[= \{a\}$,
- $\mathrm{bord}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \varnothing = \mathbb{N}$,
- $\mathrm{bord}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \varnothing$.

Intérieur, adhérence et complémentaire

Rappelons que le complémentaire de B ($\subset \mathbb{R}$) est $B^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin B\}$.

Lemme 2.16

laisser en exercice

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, $(\mathrm{int}(A))^c = \mathrm{adh}(A^c)$ *et* $(\mathrm{adh}(A))^c = \mathrm{int}(A^c)$.

Démonstration :

Soit $A \subset \mathbb{R}$, montrons que $(\mathrm{int}(A))^c = \mathrm{adh}(A^c)$.

$a \in (\mathrm{int}(A))^c \iff a \notin \mathrm{int}(A) \iff \forall \delta > 0,\ ]a-\delta, a+\delta[$ pas inclu dans A

$\iff \forall \delta > 0,\ ]a-\delta; a+\delta[\cap A^c$ est non vide

$\iff a \in \mathrm{adh}(A^c)$

↑ def de $a \in \mathrm{adh}(A^c)$

Exemples :

$\mathrm{int}([0;1])$

$(\mathrm{int}([0,1]))^c =]0,1[^c =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$,

$\mathrm{adh}([0,1]^c) = \mathrm{adh}(]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[) =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$,

$(\mathrm{int}(\{25\}))^c = \varnothing^c = \mathbb{R}$,

$\mathrm{adh}(\{25\}^c) = \mathrm{adh}(]-\infty, 25[\cup]25, +\infty[) = \mathbb{R}$.

Ensemble ouvert et ensemble fermé

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Définition 2.17

$A\ (\subset \mathbb{R})$ *est ouvert* $\iff \mathrm{int}(A) = A$.
$A\ (\subset \mathbb{R})$ *est fermé* $\iff \mathrm{adh}(A) = A$.

Exemples :

- Les intervalles ouverts (ceux de la forme $]a, b[$) sont ouverts (!!).
- Les intervalles fermés (ceux de la forme $[a, b]$) sont fermés (!!).
- Les intervalles de la forme $]a, b]$ et $[a, b[$ ne sont ni ouverts ni fermés.
- Attention : $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés.

Ouvert, fermé et complémentaire

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.18

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors A est ouvert $\iff$ A^c est fermé.

Démonstration :

A est ouvert $\iff A = \text{int}(A) \iff A^c = (\text{int}(A))^c$ (lemme précédent : $(\text{int}(A))^c = \text{adh}(A^c)$)

$\iff A^c = \text{adh}(A^c)$

$\iff A^c$ fermé. (déf d'un fermé).

Exemple : $]0,1[$ est ouvert $\Rightarrow$ son complémentaire $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$ est fermé.

Retour sur l'infimum et le supremum

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.19

(i) Si $\sup A$ *existe, alors* $\sup A \in \mathrm{adh}(A)$.
(ii) Si $\inf A$ *existe, alors* $\inf A \in \mathrm{adh}(A)$. ← laisser en exercice

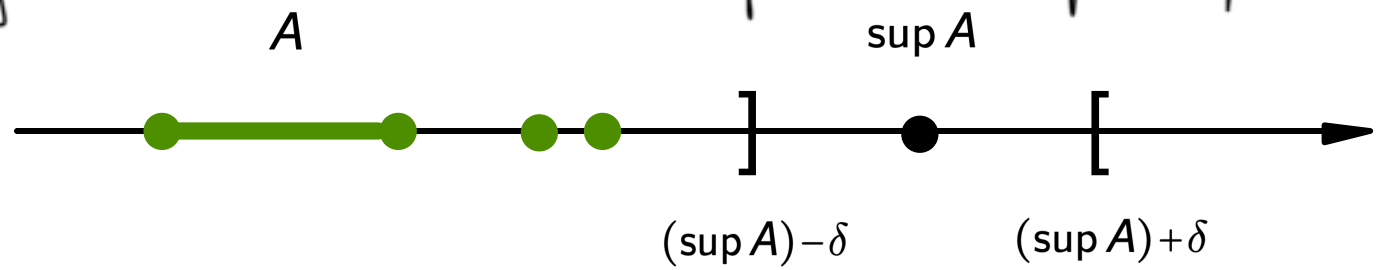
Démonstration :

i) Par l'absurde, on suppose que $\sup(A) \notin \mathrm{adh}(A)$.

Donc $\exists \delta > 0$, $]\sup(A) - \delta ; \sup(A) + \delta[\cap A = \emptyset$

Donc $\sup(A) - \delta$ est un majorant de A.

CONTRADICTION : car $\sup(A)$ est déjà le plus petit majorant de A et donc $\sup(A) - \delta$ ne peut pas l'être.



Retour sur l'infimum et le supremum (suite)

Par ailleurs, $\inf A$ et $\sup A$ n'appartiennent jamais à $\mathrm{int}(A)$ (exercice !). Donc on a toujours $\inf A, \sup A \in \mathrm{bord}(A)$ (s'ils existent).

Exemples :

- pour $A =]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ et $[a,b]$,

$$\inf A = a \in \{a,b\} = \mathrm{bord}(A),$$
$$\sup A = b \in \{a,b\} = \mathrm{bord}(A),$$

- pour $A =]a,+\infty[$ et $[a,+\infty[$,

$$\inf A = a \in \{a\} = \mathrm{bord}(A),$$
$\sup A$ n'existe pas.